TUTORAT UE4 2012-2013 – Biostatistiques
CORRECTION Séance n°2 – Semaine du 01/10/2012

Lois de probabilité- Pr. R. Sabatier

Séance préparée par Guilhaume GARRIGUES, Chayma IGHIDI, Laura MILHAU
et Grégoire SARTHOULET

QCM n°1 : **A, C, E**

A. **Vrai.** On obtient le résultat directement par lecture inverse de la table, on cherche la valeur 0,9066, elle correspond à une valeur de t=1,32
B. Faux. P(U>t)=0,9066. La table de la loi normale ne donne les valeurs que pour $P(U \leq t)$ donc on fait $P(U > t) = 1 - P(U \leq t) = 1 - 0{,}9066 = 0{,}0934$. Par lecture inverse de la table, on cherche la valeur 0,0934, elle correspond à une valeur de t=-1,32
C. **Vrai.** Cf. item B
D. Faux. Lecture directe de la table : P(U>2,91)=1-P(U$\leq$ $2{,}91) = 1 - 0{,}9982 = 0{,}0018$
E. **Vrai**. $P(-1 < U < 1) = \pi(1) - \pi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

QCM n°2 : **B, C, D, E**

A. Faux.
B. **Vrai.** Binomiale : épreuves indépendantes l'une de l'autre, uniquement deux réponses possibles et complémentaires, paramètres : n=50 et p=0,3
C. **Vrai**. μ=np=15 et σ=npq=3.24 (approximation possible car n>30, np>5 et nq>5)
D. **Vrai**.
E. **Vrai**.

QCM n°3 : **B, C**

A. Faux. C'est supérieur **ou égal,** ce serait vrai si on avait mis $P(X \geq 1) = 0.02$
B. **Vrai.** P(X=0)= $(\lambda^{o}\ e^{-\lambda}) / 0\,! = e^{-\lambda} = 0.98$ donc λ= - ln (0.98) = 0.02
C. **Vrai.** La loi de Poisson est bien discrète
D. Faux. La loi de Poisson est adaptée pour les évènements rares
E. Faux. Pour faire cette approximation il faut que λ≥20

QCM n°4 : **B, C**

A. Faux. Binomiale : épreuves indépendantes l'une de l'autre, uniquement deux réponses possibles et complémentaires, paramètres : n=30 et p=0,7
B. **VRAI.** Cela correspond à l'espérance E(X)=np=21
C. **VRAI.** P(X=15) = $C_{30}^{15}\ (0.7)^{15}\ (0.3)^{15}$= 0.0106
D. Faux. l'approximation est possible (car n>30, np>5 et nq>5) mais les paramètres sont μ=21 et σ=$\sqrt{npq} = \sqrt{6{,}3} = 2{,}5$

E. Faux. P(X >16)= 1- P(X≤16) = 1- P(X ≤16.5) = 1 – P(U ≤ $\frac{16,5-21}{\sqrt{6,3}}$) = 1 – P(U <-1,79) = 1-0,0367 = 0,9633.

QCM n°5 : **A, B, C, D, E**

A. **Vrai.** f 'est continue sauf en un nombre fini de points notamment en 0

B. **Vrai.** Une exponentielle est une fonction continue sur R

C. **Vrai.** f continue sur R-{1} et g continue sur R et f(x) ≥ 0 (car x∈ $[1, +\infty]$ et f(x)=0 sinon) et g(x) ≥ 0 (car g(x)=0 quand x< 0) pour tout x є R.

- On vérifie si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{3}{x^4} = \int_{1}^{+\infty} 3x^{-4}dx = [-x^{-3}]_1^{+\infty} = 1$$

- On vérifie si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).dx = 1$

$\int_{-\infty}^{0} 0.dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}dx$ (on obtient ce résultat après utilisation de la formule <u>d'intégration par partie</u> :$\int u'v = [uv] - \int uv'$ =0 $- \int_0^{+\infty} -e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

D. **Vrai.**

E. **Vrai.**

QCM n°6: ***A, C, D***

A. **Vrai.**

B. Faux : E(X)=$\mu = 1{,}1$ et Var(X)=$\sigma^2 = 0{,}3^2 = 0{,}09$

C. **Vrai.** U est dite loi normale centrée réduite.

D. **Vrai.** Cette transformation permet d'utiliser la loi normale centrée réduite.

E. Faux :

$P(6 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{6-7}{3} \leq \frac{X-7}{3} \leq \frac{8-7}{3}\right) = P(-0{,}33 \leq U \leq 0{,}33) = \pi(0{,}33) - \pi(-0{,}33) = 0{,}6293 - 0{,}3707 = 0{,}2586$

<u>Remarque :</u> la loi normale centrée réduite étant symétrique on a $\pi(x) = 1 - \pi(-x)$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - P\left(U \leq \frac{8-7}{3}\right) = 1 - \pi(0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

QCM n°7 ***A, B, D, E***

A. **Vrai.** Moyenne=$\frac{0{,}40+0{,}8+0{,}4+1{,}2+1{,}6+4+2{,}4+2+1{,}2}{9} = 1{,}56$

B. **Vrai.** s=1.07 euros

On calcule l'écart-type observé dans l'échantillon.

La variance observée dans un échantillon se calcule ainsi :

s²=$\frac{1}{n}\sum x_i{}^2 - \mu^2 = \frac{1}{9} \times 32{,}16 - 1{,}56^2 = 1{,}14$

Donc l'écart-type observé vaut :s=$\sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}14} = 1{,}07$

C. Faux.

D. **Vrai.**

E. **Vrai.** L'intervalle de confiance de la moyenne se calcule ainsi: $\left[\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

S²= (n/n-1) *s²= $\frac{9}{8} \times s^2$= 1.2822 d'où S= 1.1323.

Donc sachant qu'à 5% le quantile de la loi de Student à 8 ddl est 2.306 alors l'intervalle est :

$$\left[1{,}56 \pm 2{,}306 \times \frac{\sqrt{1{,}2822}}{\sqrt{9}}\right] = [0.69{,}2.43]$$

QCM n°8: **A, B, C, D**

A. **Vrai.** f(x) = kx si 0 < x < 2, f(x) = 0 sinon, f(x) continue sur R (sauf en un nombre fini de point) f(x) ≥

0 si k ≥ 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0.\,dx + \int_{0}^{2} kx.\,dx + \int_{2}^{+\infty} 0.\,dx = \int_{0}^{2} kx.\,dx = [\frac{kx}{2}]_0^2 = 2k - 0 = 2k \; et\, si\; k = \frac{1}{2} \; alors \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,dx = 1.$$

B. **Vrai.** $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5^2/4 = 0{,}9375.$

<u>Pour calculer F(u)</u> : $F(u) = \int_0^u \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^u = \frac{u^2}{4}$ et on remplace u dans la formule.

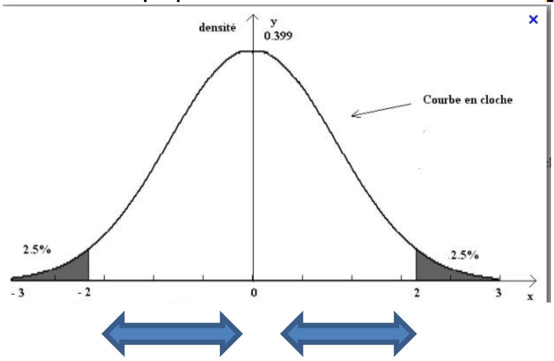
C. **Vrai.** car <u>loi continue</u>.

D. **Vrai.** calculer :$E(X) = \int_0^2 x.f(x).\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}.\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$.

E. Faux.

<u>*QCM n°9:*</u> A, C

A. **Vrai.** $\mu(x) = \frac{100+60}{2} = 80$ car la densité d'une loi normale est symétrique autour de sa moyenne.
B. Faux.
C. Vrai.
D. Faux.
E. Faux.
95% de la population est dans l'intervalle $[\bar{x} - 1.96\sigma;\ \bar{x} + 1.96\sigma]$ (



-1.96σ +1.96σ

$3.92\sigma = 40 \leftrightarrow \sigma \approx 10 \; et \; \sigma^2 \approx 100$

<u>*QCM n°10 :*</u> D

A. Faux.
B. Faux.
C. Faux. np=2.1<5
D. **Vrai.** n>20 et p<0.5 soit λ= np= 150x0.014=2.1 ou 2.
E. Faux. P(X≥3)= 1-P(X<3)= 1-[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]
= 1-5e^{-2}
= 1- 0.68
= 0.32

<u>*QCM n°11 :*</u> B, C

<u>Rappel loi exponentielle</u> :

$E(\theta) : f(x)$={$\theta e^{-\theta x} si\; x > 0$
{$0\; sinon$

- $F(X) = 1 - e^{-\theta x} pour\; tout\; x \in R$
- $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\theta}}$

- $V(X) = \frac{1}{\theta^2}$

A. Faux.
B. **Vrai.** $P(T \le 70) = F(70) = 0,05 = 1 - e^{-\theta x} \to 0,95 = e^{-70\theta} \to \theta = -\frac{ln0,95}{70} \to \frac{1}{\theta} = 1364,7$
C. **Vrai.** $P(T > 30) = 1 - P(T \le 30) = 1 - F(30) = 1 - \left(1 - e^{-30\theta}\right) = 1 - 0,022 = 0,978$
D. Faux.
E. Faux. $E(T) = \frac{1}{\theta} = 1364,7.$

<u>QCM n°12 :</u> **B, C**

A. Faux. On utilise P (D>138) = 0,5 et P(D>180) = 0,08 pour trouver 2 formules en fonction de μ et σ. On résout ensuite un système à deux inconnues pour trouver μ = 138 et σ = 29,8.

$P(D > 180) = 0,08 = 1 - P(D \le 180) = 1 - 0,92 = 0,08$ et $P(D \le 180) = 0,92$

$\pi(\frac{180-\mu}{\sigma}) = 0,92$ *d'après le tableau on en déduit* $(\frac{180-\mu}{\sigma}) = 1,41.$

$P(D > 138) = 0,5$ donc $1 - P(D \le 138) = 0,5$ et $\pi(\frac{138-\mu}{\sigma}) = 0,5$ on en déduit que $(\frac{138-\mu}{\sigma}) = 0,6915.$

On réalise ensuite un système à deux inconnues pour trouver $\mu = 138$ *et* $\sigma = 29,8.$

Autre correction possible :
P(D>138)=0.5 => μ=138 (par symétrie de la loi normale autour de son espérance).
Puis p(D>180)=0.08 => π ((180- μ)/σ = 0.92 d'après le tableau on en déduit (180-138)/ σ =1.41 → σ = 29.8

B. **Vrai.**
C. **Vrai.**
D. Faux.
E. Faux. On calcule $P(D < 80)$ avec $\mu = 138$ et $\sigma = 29,8.$

$P(D < 80) = \pi\left(\frac{80 - 138}{29.8}\right) = \pi(-1.95) = 0,0256.$