TUTORAT UE 4 2015-2016 – Biostatistiques
Séance n°3 – Semaine du 05/10/2015

S.E.M : Tests Statistiques
Professeur Molinari

Séance préparée par les Tuteurs du TSN.

I- Rappels

1) Les risques

a. Risque α

Le rejet ou non rejet de H0 étant un pari, quelle que soit notre décision (rejet ou non rejet) il nous faut accepter de prendre un risque.
Le risque α correspond au risque maximal que l'on accepte de prendre en rejetant H0.
Ainsi dire que l'on rejette une hypothèse au risque de 5%, c'est dire que l'on rejette cette hypothèse en acceptant de prendre au maximum 5% de risque que l'on se trompe (rejet à tort).

b. Risque β

Le risque β, correspond au risque de ne pas rejeter H0 alors qu'elle est fausse.

Rq : on définit la puissance comme étant : 1-β
La puissance est la capacité du test à montrer la différence c'est-à-dire à rejeter H0.

2) Tests paramétriques / non paramétriques

- Les tests paramétriques sont meilleurs que les non paramétriques : car plus puissants (β plus petit).

- Mais les tests paramétriques sont plus contraignants : car nécessitent des conditions pour être utilisés.

  ⇨ Donc dès qu'il est possible (présence des conditions d'application) d'utiliser un test paramétrique on le fera (sauf si précision contraire dans énoncé).
  Dans le cas contraire on utilisera le test non paramétrique adéquat.

  Rq : il est donc nécessaire de connaitre les conditions d'applications des tests paramétriques !

3) Test unilatéral / Test bilatéral

- On utilise un test :
  - Bilatéral :
    - Si on veut montrer une différence statistique sans s'occuper du sens de la différence.
    - Ici H0 sous forme de « = » ; H1 sous forme de « ≠ »
    - On lit tα dans la table directement
  - Unilatéral :
    - Si on veut montrer une différence statistique en tenant compte du sens de la différence.
    - Ici H0 sous forme de « = » ; H1 sous forme de « < ; > »
    - On multiplie α par 2 pour lire dans la table le tα
- Exemples :

EX n°1 : **On a deux groupes de 48 personnes d'une population tirées au sort. On se demande si un traitement A augmente significativement le taux d'hématocrite (GR/unité de volume de sang) des patients. Les sujets du groupe 1 reçoivent le traitement, tandis que ceux de l'autre groupe (2) reçoivent un placebo. Les moyennes observées sont : m_1=47 et m_2=44. Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).**

A. Doit-on utiliser un test uni- ou bilatéral?
B. A quoi correspond H0?
C. A quoi correspond H1 ?

EX n°2 : **Dans la population américaine, le nombre moyen de repas pris au Mac do par semaine est de 5,09. Dans un échantillon de 110 américains qui ont entre 18 et 25 ans, le nombre moyen de repas pris au Mac do est de 4,98 par semaine. On cherche à savoir si le nombre moyen de repas pris au Mac do par semaine dans la population dont est issu l'échantillon est différent de celui de la population américaine de référence. Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).**

A. Doit-on utiliser un test uni- ou bilatéral?
B. A quoi correspond H0?
C. A quoi correspond H1 ?

II- Méthodologie des tests statistiques

1) Recueil de données : Se poser les bonnes questions !

a. Quel type de variable ?
b. Qu'est-ce qu'on compare ; Echantillons indépendants/appariés ?
c. Taille de l'échantillon ?
d. Conditions d'application du test paramétrique « idéal » ?
e. H0 ? H1 ?
f. Eventuellement : α ?
g. Exemples :

EX n°3 : **Un biologiste pense que la concentration d'une molécule est modifiée après l'administration d'un médicament X. Pour savoir si la modification est significative, il mesure sur un échantillon de 15 personnes la quantité de cette molécule avant et après leur avoir administré le médicament X. Avant l'administration, la moyenne est de 122 mg/L. Après l'administration, elle est de 126 mg/L. On suppose la normalité. Faire le recueil de données étape par étape.**

EX n°4 : **On fait manger un velouté de carottes à deux groupes distincts : un groupe de 35 filles et un groupe de 53 garçons. On remarque le lendemain que 20 filles ont les fesses plus roses que la veille et que c'est également le cas pour 36 garçons.**
On cherche à savoir si le taux de garçons dont les fesses sont devenues roses est le même que celui chez les filles. Faire le recueil de données étape par étape.

2) Résolution de la statistique de Test (paramétriques) :

a. Variable quantitative

i. σ_1^2 VS σ_2^2 : Test F

=>Vérification de la condition d'égalité des variances nécessaire (si n<30) pour faire Student.

$$t_{obs} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

tα est lu dans la table de Fisher du α, à n1 -1 et n2 -1 ddl

ii. Moyenne obs VS Moyenne théo : μ_0 VS µ

- n≥30 : Ecart-réduit

$$t_{obs} = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tα lu à dans la table de l'écart réduit

- n<30 : Student

$$t_{obs} = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

tα lu dans la table de Student à n-1 ddl

iii. Moyenne obs1 VS Moyenne obs2 (appariés)

- Student apparié

On calcule la moyenne des différences et l'écart type des différences.

On est ensuite ramené à une moyenne obs VS une moyenne théorique (=0).

iv. Moyenne obs1 VS Moyenne obs2 (indépendants) : µ1 VS µ2

- n1 et n2 ≥30 : Ecart-réduit

  - $t_{obs} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}}$

  tα lu dans la table de l'écart réduit

- n1 et/ou n2 <30

  - Egalité des variances : Student

    - $t_{obs} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$

    - avec $s^2 = \frac{(n_1 - 1){s_1}^2 + (n_2 - 1){s_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$

    tα lu dans la table de Student à n1**+**n2**-**2 ddl

  - Variances différentes : Aspin Welch

    $$t_{obs} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

    /!\ tα est lu dans la table de student à m degrés de liberté avec :

    $$\boxed{\frac{1}{m} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1} \quad \text{avec} \quad c = \frac{s_1^2/n_1}{(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)}}$$

b. Variable qualitative

i. Distribution obs VS Distribution théo : si tous les effectifs théoriques sont ≥5 : χ²

$$\chi^2_{obs} = t_{obs} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

X²α est lu à (r-1) ddl

ii. Echantillons appariés, deux distributions observées : χ² de Mac Nemar, si f+g = 10

$$\chi^2_{obs} mac\ nemar = \frac{(f - g)^2}{f + g}$$

Avec f et g paires discordantes
X²α est lu dans la table du χ² à 1ddl

iii. Echantillons indépendants

- Pourcentage obs1 VS Pourcentage obs2

  - n1p, n1q, n2p, et n2q ≥5 : Ecart-réduit

$$\boxed{t_{obs} = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}}$$

    Avec :

$$\boxed{p = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{a}{n_1} \; ; \; p_2 = \frac{c}{n_2}$$

    tα est lu dans la table de l'écart réduit.

  - Effectifs théoriques ≥5 : χ²

$$\chi^2{}_{obs} = \sum_{i,j}^{2} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

    χ²α est lu dans la table du χ² à 1 ddl

  - Aucun des 2 : Test exact de Fisher

- Plusieurs pourcentages obs : χ²

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i,j=1}^{k,r} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

  χ²α est lu dans la table du χ² à (r-1)×(k-1) ddl

c. Exemple :

EX n°5 : **A des fins statistiques, le jury décide de comparer les étudiants de PACES du matin(M) et de l'après-midi(A) grâce à la variable R qui correspond à la proportion d'étudiants qui rangent leurs affaires avant que le cours ne finisse. Ce test est bilatéral et s'appuie sur les données du tableau ci-dessous. Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).**

	affaires rangées	**affaires non rangées**
Matin	**10**	**21**
Après-midi	**4**	**14**

A. Si le test était unilatéral, l'hypothèse nulle aurait été "Les étudiants du matin rangent plus leurs affaires avant la fin du cours que les élèves de l'après-midi".
B. Il faut utiliser le test exact de Fisher.
C. Avec un test du χ^2, χ^2_{obs}=0,31
D. Au risque 5%, avec un test du χ^2, χ²α=0,455
E. Au risque 5%, on rejette l'hypothèse nulle.
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

} voir 3)

EX n°6 : **Gustave, directeur d'une ferme aux crocodiles dans le sud de la France, veut savoir si ses crocodiles ont des dents de tailles différentes de celles de crocodiles sauvages des rivières du Sénégal. Après de multiples périples, Gustave mesure pour 16 crocodiles sauvages, rencontrés aléatoirement, une moyenne de la taille des dents m_1=3,6 cm et une variance s_1^2=3. Aussi 16 crocodiles de sa ferme ont des dents de moyenne m_2=2,3 cm avec une variance de s_2^2=4,5. Choisir la ou les proposition(s) exacte(s)**

A. Les variances estimées respectives des crocodiles sauvages et des crocodiles de la ferme sont S_1^2=3,2 et S_2^2=4,8.
B. Avec un risque de 0,05, on rejette l'hypothèse d'égalité des deux variances.
C. Le test à utiliser est paramétrique et concerne des variables quantitatives.
D. On doit faire une hypothèse de normalité car on utilise le test de Student.
E. Au risque 5%, on rejette l'hypothèse nulle. (Voir 3))
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

EX n°7 : **Au sein des bizuts montpelliérains (A), on sélectionne un échantillon de 100 personnes. Sur ces derniers, 85 finiront couchés en manade avant minuit (babtous fragiles). Chez les nîmois (B), on sélectionne un échantillon de 50 bizuts et on s'aperçoit que seulement 20 finiront couchés avant minuit. On souhaite déterminer s'il y a une réelle différence entre les bizuts de chaque ville quant à leur faculté à gérer l'alcool.**

A. L'hypothèse nulle à tester est pA = pB.
B. Les conditions de réalisation du test de l'écart réduit sont réunies
C. Avec un risque de première espèce à 10%, on rejette l'hypothèse d'égalité entre les bizuts.
D. Avec un risque de première espèce à 5%, on rejette l'hypothèse d'égalité entre les bizuts. voir 3)
E. Avec un risque de première espèce à 2%, on rejette l'hypothèse d'égalité entre les bizuts.
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

EX n°8 : **Dans la savane plusieurs espèces cohabitent, on cherche à savoir si les girafes sont plus grandes que les éléphants. Pour ce faire on étudie 2 groupes.**

- Un groupe de 45 girafes dont la taille moyenne est de 430cm et l'écart type est 46cm.

- Un groupe de 84 éléphants dont la taille moyenne est de 405cm et l'écart type est 33cm.

Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).

A. Pour utiliser le test paramétrique le plus adapté on doit faire l'hypothèse de normalité.
B. On utilise un test de l'écart réduit en bilatéral.
C. tobs = 21,02.
D. Ici, pour un risque de 5% : tα = 1,645, on rejette donc H0.
E. Pour un risque de 5% on accepte H1. voir 3)
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

3) Conclure :

a. Méthode classique :

Utilisation brute de la statistique de test
Lecture directe du tα ; χα … dans la table adéquate au bon ddl.
Puis comparaison à la statistique de test calculée précédemment

Exemples

EX n°8 : **Dans la savane plusieurs espèces cohabitent, on cherche à savoir si les girafes sont plus grandes que les éléphants. Pour ce faire on étudie 2 groupes.**

- Un groupe de 45 girafes dont la taille moyenne est de 430cm et l'écart type est 46cm.

- Un groupe de 84 éléphants dont la taille moyenne est de 405cm et l'écart type est 33cm.

Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).

A. Pour utiliser le test paramétrique le plus adapté on doit faire l'hypothèse de normalité.
B. On utilise un test de l'écart réduit en bilatéral.
C. tobs = 21,02.
D. Ici, pour un risque de 5% : tα = 1,645, on rejette donc H0.
E. Pour un risque de 5% on accepte H1.
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

EX n°5 : **A des fins statistiques, le jury décide de comparer les étudiants de PACES du matin(M) et de l'après-midi(A) grâce à la variable R qui correspond à la proportion d'étudiants qui rangent leurs affaires avant que le cours ne finisse. Ce test est bilatéral et s'appuie sur les données du tableau ci-dessous. Choisir la ou les proposition(s) exacte(s).**

A. Si le test était unilatéral, l'hypothèse nulle aurait été "Les étudiants du matin rangent plus leurs affaires avant la fin du cours que les les élèves de l'après-midi".
B. Il faut utiliser le test exact de Fisher.
C. Avec un test du χ^2, χ^2_{obs}=0,31
D. Au risque 5%, avec un test du χ^2, $\chi^2\alpha$=0,455
E. Au risque 5%, on rejette l'hypothèse nulle.
F. Toutes les propositions précédentes sont fausses.

b. Méthode de la p-value

Lecture inversée de la table adéquate, au bon ddl afin de trouver la p-value associée à la statistique de test calculée précédemment.
Puis comparaison directe au α demandée.
Rappel : la p-value étant définie comme plus petite valeur du risque de première espèce conduisant au rejet de H0. Tout α supérieur à celle-ci entrainera un rejet de H0

Exemples 5 et 8.